

Modelli matematici in economia: una necessità, un pericolo o un'illusione?

Gian Italo Bischi

DESP - Dipartimento di Economia, Società, Politica

Università di Urbino "Carlo Bo"

gian.bischi@uniurb.it

<http://www.mdef.it/gian-italo-bischi/>

Venezia, Sabato 14 aprile 2018

Convegno "La storia (della matematica) in classe: storie di donne e uomini, storie di idee"

LA DOMANDA DELLA REGINA



«It's awful. Why did nobody notice it?»

(Elisabetta II, London School of Economics, 5 Novembre 2008)

Robert Lucas Jr., economista neoclassico di Chicago, padre della teoria delle aspettative razionali, Nobel per l'Economia nel 1995

•**2003**: *“La mia tesi in questa conferenza è che la macroeconomia nel suo senso originario ha avuto successo: il suo problema centrale della previsione di depressioni è stato risolto per tutti gli scopi pratici*

•**19 settembre 2007**: *“Sono scettico che il problema dei mutui subprime contaminerà l'intero mercato dei mutui [...] Se abbiamo imparato qualcosa in questi ultimi 20 anni è che c'è parecchia stabilità integrata nell'economia reale.”*

Eugene Fama, economista neoclassico di Chicago, padre della teoria dei mercati efficienti, Nobel nel 2013

• **2008**: *La crisi non è stata prevista semplicemente perché, secondo la nostra teoria economica, tali eventi non possono essere previsti*

Paul Krugman, economista neo-keynesiano di Princeton, padre della teoria della nuova geografia economica, Nobel nel 2008

•**2009**: *Pochi economisti hanno previsto l'attuale crisi, ma questo è l'ultimo dei problemi del campo. La responsabilità più schiacciante va alla convinzione ampiamente diffusa tra gli economisti che una crisi del genere non potesse verificarsi. Alla base di questa certezza sprovveduta domina una visione idealizzata del capitalismo in cui gli individui sono sempre razionali e i mercati perfettamente efficienti*

Polemica riaccesa dalla crisi economica.

- Come può una scienza fondata su metodi matematici non prevedere e non sapere come intervenire?
- L'economia per inseguire l'eleganza dei suoi modelli matematici ha dimenticato di confrontarsi col mondo reale?

Benedetto XVI

Angelus di inizio anno 2010:

«Il futuro è nelle mani di Dio,
non di maghi e economisti».



Problema del monopolista: Più produco e più guadagno?

$q = \text{quantità prodotta}$

$p = \text{prezzo unitario di vendita}$

$c = \text{costo unitario di produzione}$

$$\text{Profitto} = \text{Ricavo} - \text{Costo} = p q - c q = (p - c) q$$

Teorema.

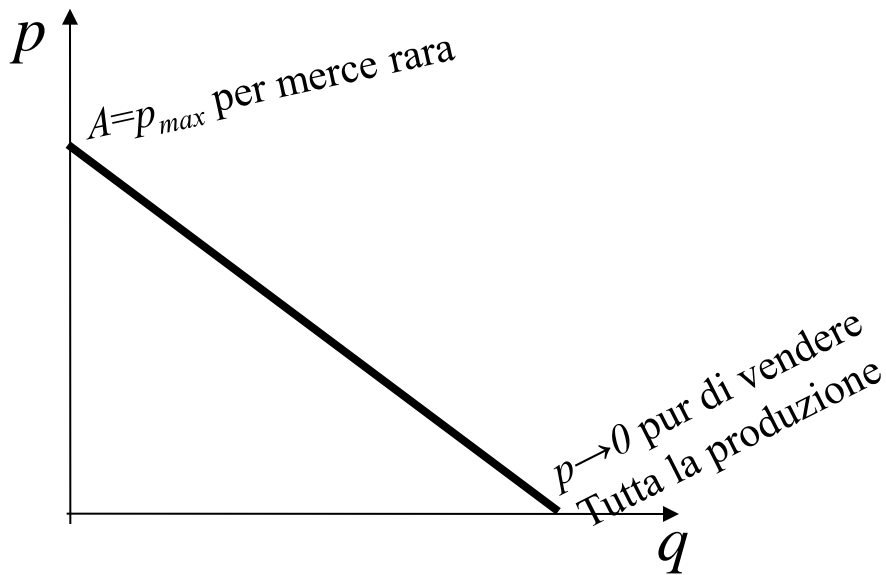
Se $p > c$ allora il profitto cresce ogniqualvolta cresce la produzione

Ma ci sono sempre dei consumatori disposti a comprare ciò che si produce al prezzo imposto dal monopolista ?

q (quantità venduta) e p (prezzo di vendita) non sono indipendenti

Il prezzo decresce al crescere della quantità
ovvero
la quantità acquistata è funzione decrescente del prezzo

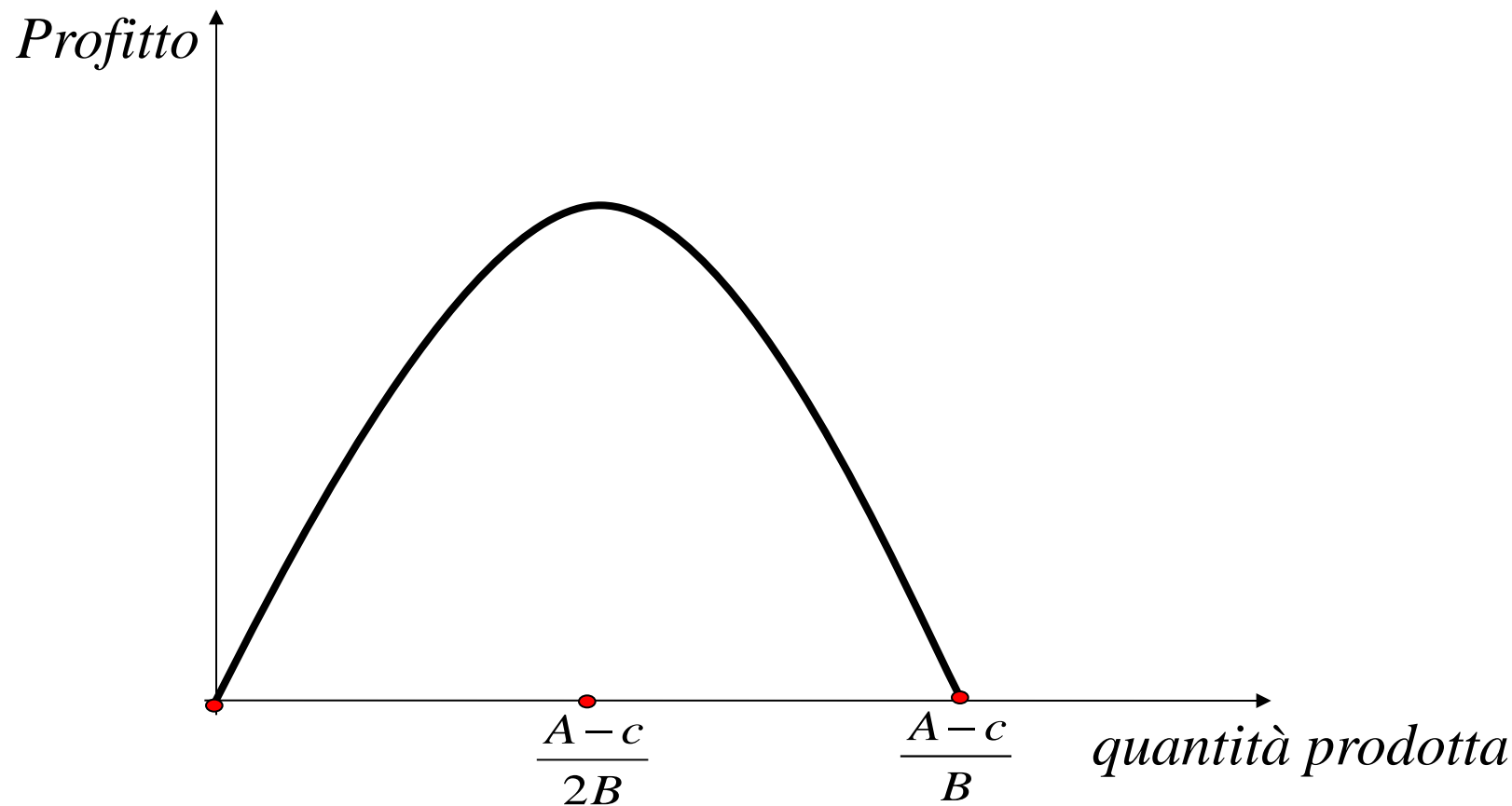
Esempio: Funzione di domanda lineare



$$p = A - Bq$$

$$\text{profitto del monopolista} = p q - c q = \underbrace{(A - B q)} q - c q$$

$$\Pi = f(q) = -B q^2 + (A - c) q$$



Problema del duopolio

A. Cournot, *Récherches sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*, 1838.

Due produttori, 1 e 2, vendono lo stesso prodotto

Il produttore 1 produce e immette nel mercato q_1 con costi c_1q_1

Il produttore 2 produce e immette nel mercato q_2 con costi c_2q_2

prezzo: $p = A - B Q_{TOT} = A - B (q_1 + q_2)$

Profitto produttore 1: $\Pi_1 = pq_1 - c_1q_1 = [A - B (q_1 + q_2)]q_1 - c_1q_1$

Profitto produttore 2: $\Pi_2 = pq_2 - c_2q_2 = [A - B (q_1 + q_2)]q_2 - c_2q_2$

$$\Pi_1 = [A - B(q_1 + q_2)]q_1 - c_1q_1 = -Bq_1^2 + (A - c_1 - Bq_2)q_1$$

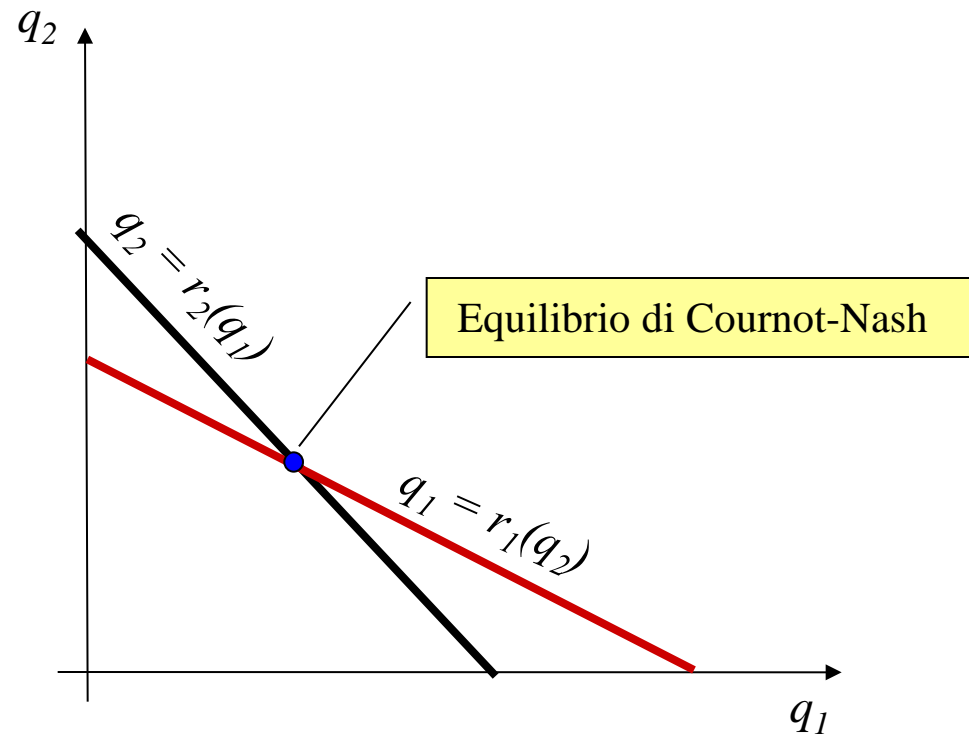
$$\text{Max per } q_1 = r_1(q_2) = \frac{A - c_1 - Bq_2}{2B}$$

$$\Pi_2 = [A - B(q_1 + q_2)]q_2 - c_2q_2 = -Bq_2^2 + (A - c_2 - Bq_1)q_2$$

$$\text{Max per } q_2 = r_2(q_1) = \frac{A - c_2 - Bq_1}{2B}$$

$$\text{Equilibrio: } \begin{cases} q_1 = r_1(q_2) \\ q_2 = r_2(q_1) \end{cases}$$

$$q_1^* = \frac{A - 2c_1 + c_2}{3B} \quad q_2^* = \frac{A - 2c_2 + c_1}{3B}$$



Duopolio di Cournot (libera concorrenza) con costi uguali $c_1 = c_2 = c$

Produzione di equilibrio: $q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3} \frac{A-c}{B} \implies Q_{duo}^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3} \frac{A-c}{B}$

Prezzo di equilibrio: $p_{duo}^* = A - BQ_{duo}^* = A - \frac{2}{3}(A-c) = \frac{1}{3}(A-c)$

Profitto individuale: $\Pi_{duo}^i = q_i^* p_{duo}^* - cq_i^* = \left(\frac{A-c}{3} - c \right) \frac{A-c}{3B} = \frac{(A-c)(A-4c)}{9B}$

Monopolio (o collusione): produzione $Q_{mon}^* = \frac{1}{2} \frac{A-c}{B}$

Prezzo di monopolio $p_{mon}^* = A - BQ_{mon}^* = A - \frac{1}{2}(A-c) = \frac{1}{2}(A+c)$

Profitto di monopolio $\Pi_{mon} = Q_{mon}^* (p_{mon}^* - c) = \frac{A-c}{B} \left(\frac{A+c}{2} - c \right) = \frac{(A-c)(A+c)}{2B}$

Quindi $\frac{1}{2} \Pi_{mon} = \frac{(A-c)(A+c)}{4B} > \Pi_{duo}^i$

Possibili accordi: 1) uno solo produce e poi si divide il profitto a metà,
2) produrre ciascuno $Q_{mon}^* / 2$ cioè meno del Cournot-Nash

Vito Volterra (1860-1940)

Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che siano mai vissute.

Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse

[...]

Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le scienze biologiche e sociali, che è più intensa la curiosità, giacché è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi.

dal discorso inaugurale per l'a.a. 1901-1902 dell'Università di Roma

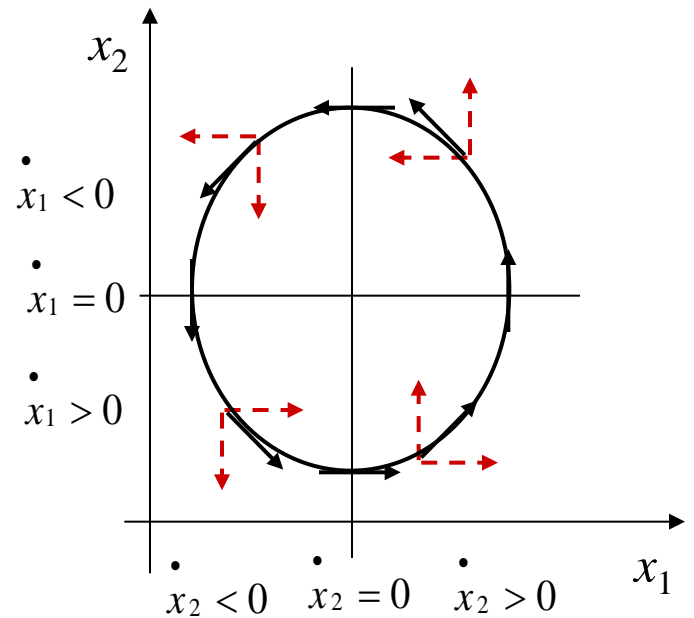


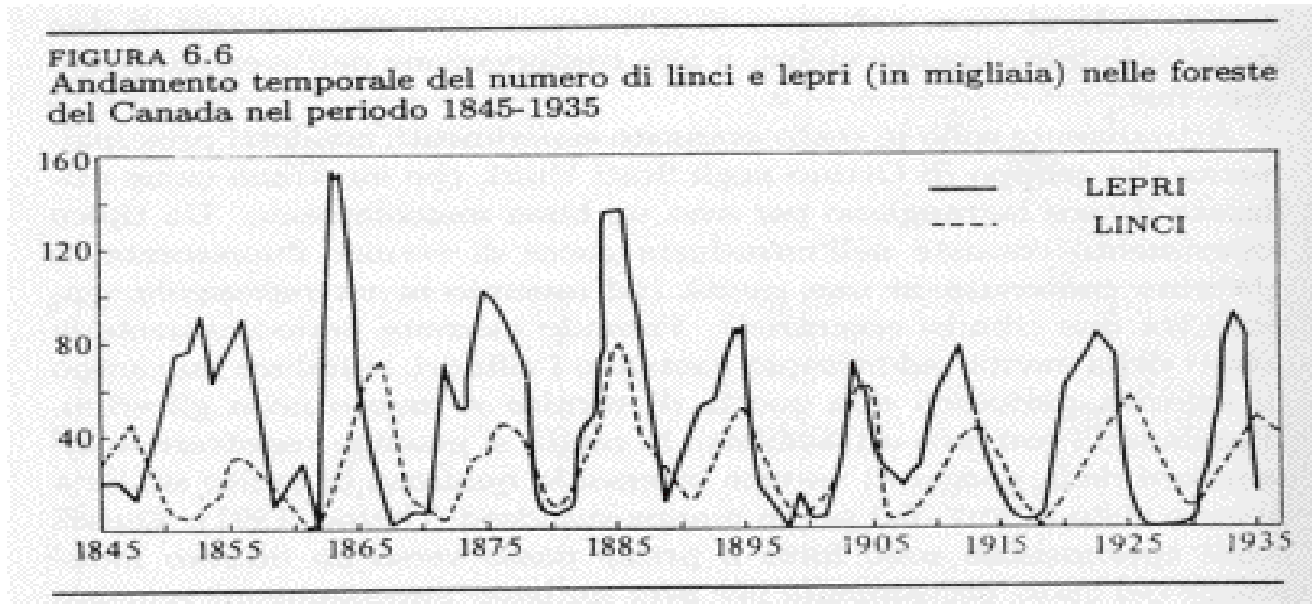
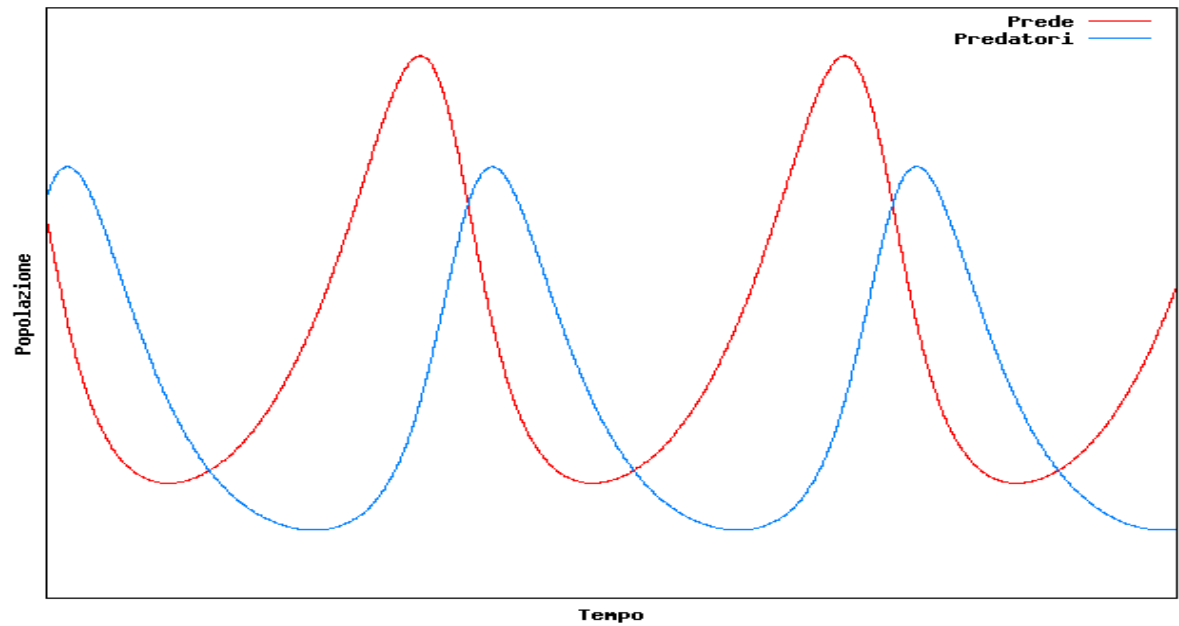
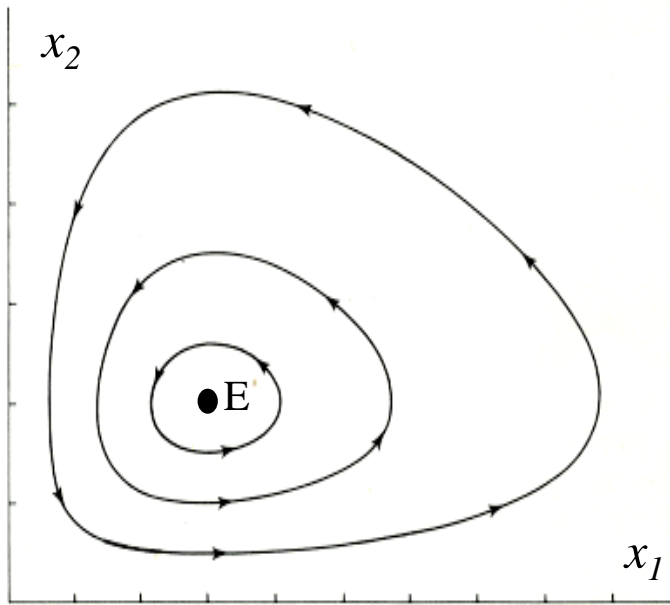
Modello Preda-predatore (Vito Volterra, 1926)

Densità prede x_1 $\frac{dx_1}{dt} = r x_1 - b x_1 x_2$

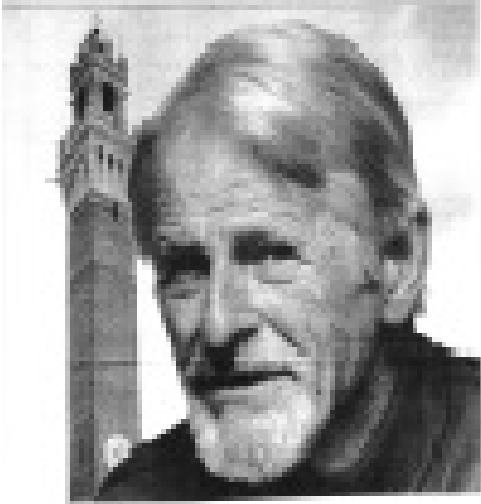
Densità predatori x_2 $\frac{dx_2}{dt} = -m x_2 + c x_1 x_2$

- $\dot{x}_1 = x_1 (r - b x_2) \geq 0$
- $\dot{x}_2 = x_2 (-m + c x_1) \geq 0$





Fluttuazioni del numero di lepri e linci canadesi ricostruite in base al numero delle pelli acquistate dalla Compagnia della Baia di Hudson nei diversi anni, da Mac Lulich (1937)



R. M. Goodwin (1967) "A Growth Cycle",
in *Socialism, Capitalism and Economic Growth*
C.H. Feinstein (Ed.) Cambridge University Press

$x(t) = L/N$ frazione di lavoratori occupati
 $y(t) = \omega L/Y$ quota del PIL per salari

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\rho - \frac{1}{\gamma} y \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(f(x) - \alpha)$$

dove $\rho = -\alpha - \beta + \frac{1}{\gamma}$ con $\alpha =$ progresso tecnologico

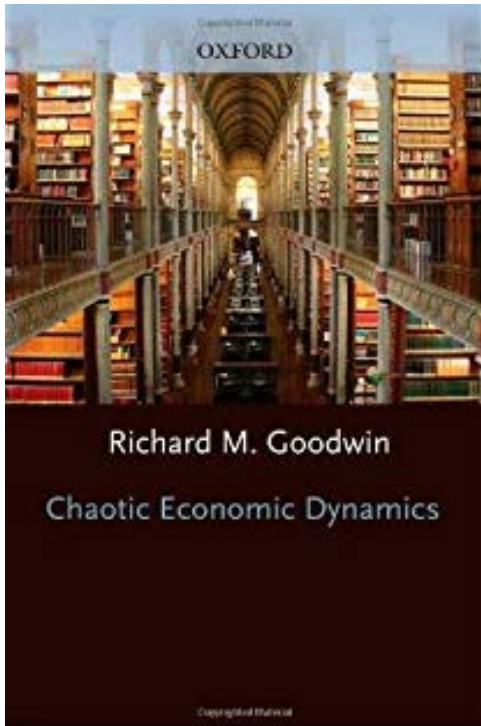
$\beta =$ crescita della popolazione

$\gamma =$ capitale / reddito

$f(x)$ relazione tra occupazione e crescita dei salari

se $f(x) = \rho x - \delta$ è proprio preda / predatore di Volterra

Richard Goodwin
NewCastle 1923, Siena 1996



UN MATEMATICO DELLA DOMENICA

“Un giorno mi capitò di dare un seminario davanti a un gruppo di colleghi, nel quale cercavo di dimostrare che era una buona cosa dar da mangiare ai disoccupati a un prezzo al di sotto del normale. Nel bel mezzo della mia esposizione venni interrotto da qualcuno che, opponendosi alla mia tesi, richiamò un teorema che, ricorrendo ai moltiplicatori di Lagrange, dimostra come un punto di massimo sociale implichi un prezzo unico per ciascun bene. Quest’esperienza in qualche modo traumatica mi ha indotto a cercare, per il resto della mia vita, di essere in grado di comprendere, almeno a livello dilettantistico, l’uso (e gli abusi) della matematica nell’analisi economica. Divenni così un “matematico della domenica”, cioè uno che coltiva quella magia nera nel tempo libero”

Da: Goodwin R.M., “Economia matematica: una visione personale” in *Il mestiere di economista. Profili autobiografici I*, Kregel, J.A., a cura di, Einaudi, Torino, 1988

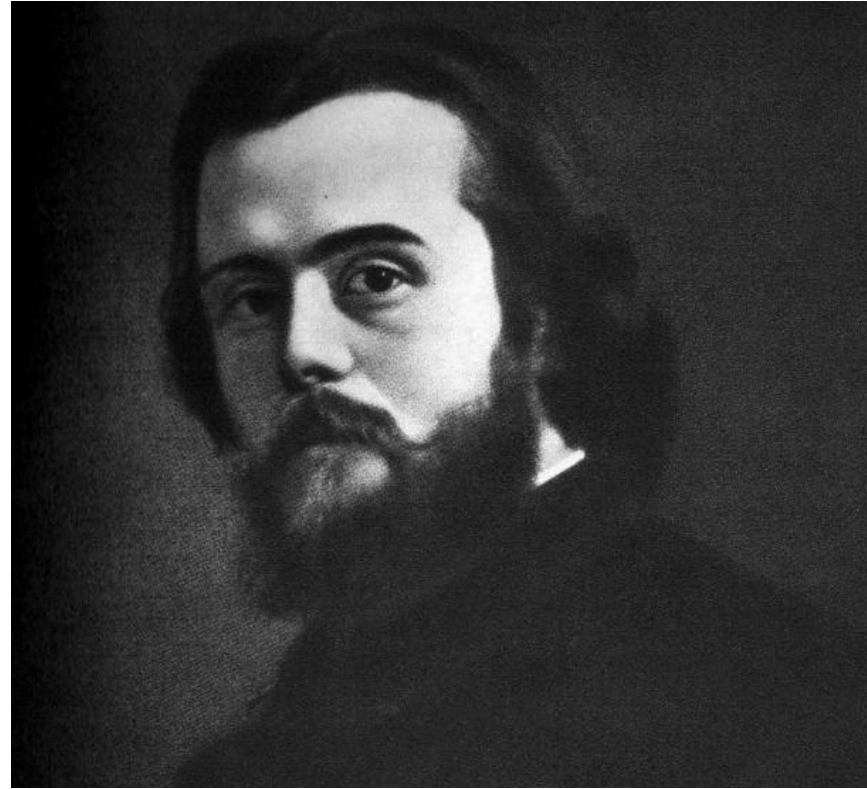
Dopo il precursore A. Cournot (1838) a Parigi, “*Récherches sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*”

La rivoluzione marginalista:

1871 - “*The Theory of Political Economy*” di W.S. Jevons a Londra;

1871- “*Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*” (*Principles of Economics*) di C.Menger a Vienna;

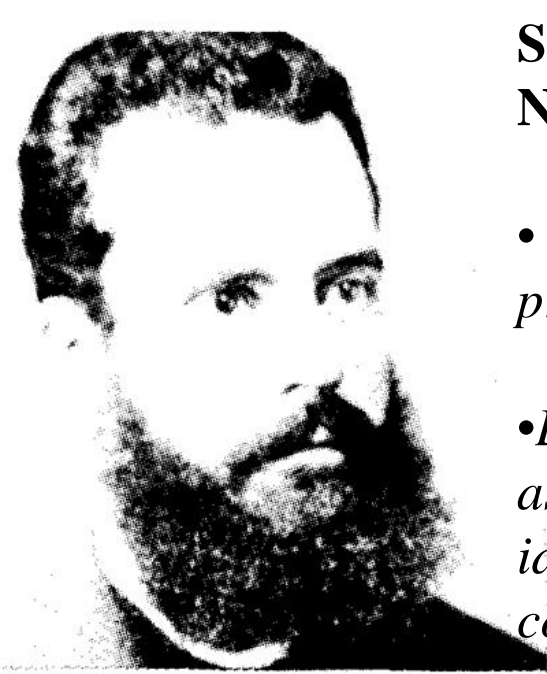
1874 - “*Eléments d’économie politique pure*” di L.Walras a Losanna.



Leon Walras (1834-1910)

Massimizzare una funzione di utilità (di soddisfazione, “felicità” ecc.)

Walras sostenne l’esistenza di una stretta analogia tra l’Economia le “scienze fisico-matematiche”. Il principio di minimizzazione permeava tutta la Fisica dell’epoca.



**Studia matematica e si laurea in ingegneria a Torino.
Nel 1892 succede a Walras sulla cattedra di Losanna.**

- *“Disinquinare” le scienze sociali da politica e filosofia, prendendo come modello la Meccanica Razionale.*
- *L’economia non abbia timore di diventare un sistema assiomatico-deduttivo, ipotizzando agenti e processi economici idealizzati, così come la fisica utilizza con grande profitto entità come i corpi rigidi, i fili inestensibili e privi di massa, i gas perfetti, le superfici prive di attrito...*

Vilfredo Pareto (1848-1923)

Le polemiche.

- E’ possibile trasformare in quantitativa una scienza umana, ovvero una disciplina i cui procedimenti e le cui conclusioni coinvolgono pesantemente pregiudizi storici, culturali e politici?
- L’impiego della Matematica fornisce all’Economia una particolare autorevolezza, che rischia di trasformarsi in presunta oggettività e che comunque rende difficile l’individuazione dei suoi condizionamenti ideologici.

Dalla corrispondenza fra Walras e Poincaré

“Ho pensato che all’inizio di ogni speculazione matematica ci sono delle ipotesi e che, perché questa speculazione sia fruttuosa, occorre, come del resto nelle applicazioni della Fisica, che ci si renda conto di queste ipotesi.

Per esempio, in Meccanica si trascura spesso l’attrito e si guarda ai corpi come infinitamente lisci. Lei guarda agli uomini come infinitamente egoisti ed infinitamente perspicaci. La prima ipotesi può essere accettata come prima approssimazione, ma la seconda necessiterebbe forse di qualche cautela.”

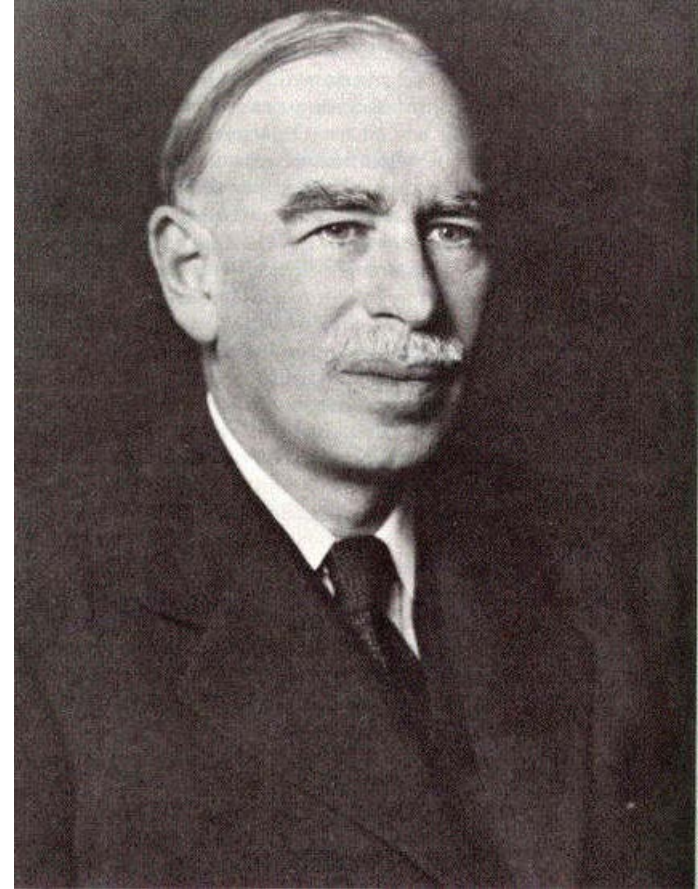


Jules Henri Poincaré (1854–1912)

Non basta semplicemente adattare i metodi e i ragionamenti della fisica alla modellizzazione dell'economia perché l'economia è una scienza morale.

Essa ha a che vedere con motivazioni, aspettative, incertezze psicologiche.

È come se la caduta della mela al suolo dipendesse dalle aspirazioni della mela, se per lei sia conveniente o meno cadere a terra, se il suolo vuole che essa cada, e se vi sono stati errori di calcolo da parte della mela sulla sua reale distanza dal centro del pianeta”



John Maynard Keynes (1883–1946)

Aggiungiamo:

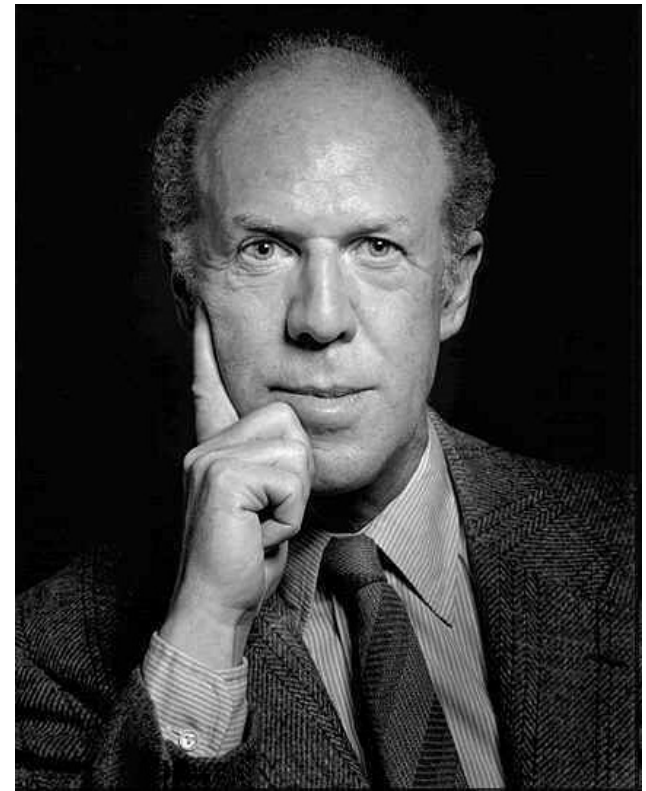
come e quanto la mela si fa condizionare dal comportamento delle altre mele dello stesso albero o di alberi vicini, le aspirazioni e aspettative della mela, le informazioni che la mela ha, ecc.

The Theory of Value (1959)

Nella prefazione Debreu scrive:

“la teoria del valore è trattata qui secondo gli standard di rigore dell’attuale scuola formalista di Matematica

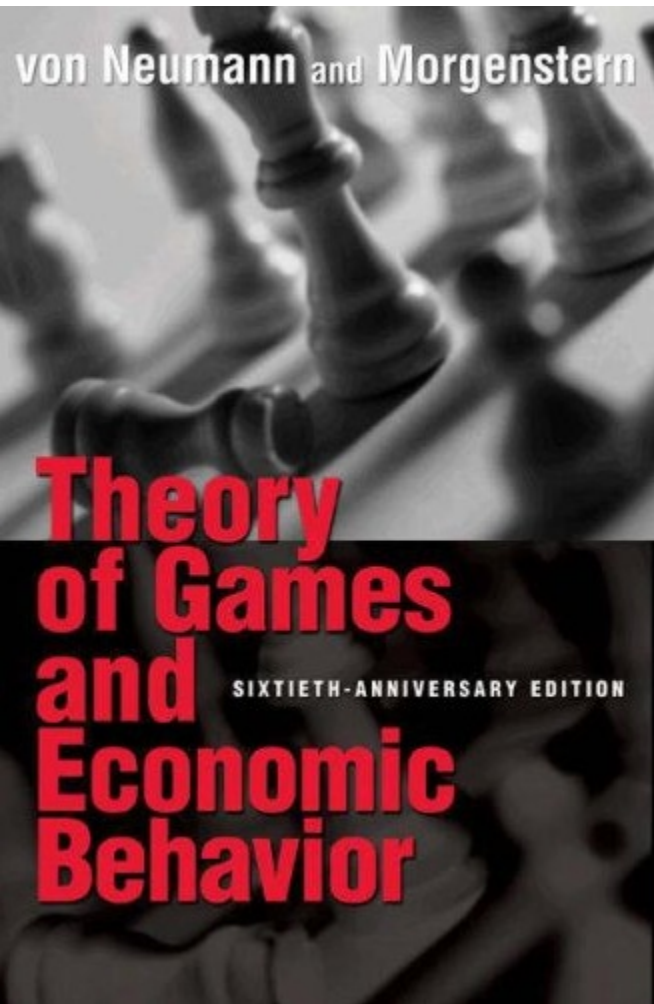
Lo standard di rigore logico della matematica in economia è ormai la regola, non più l’eccezione”.



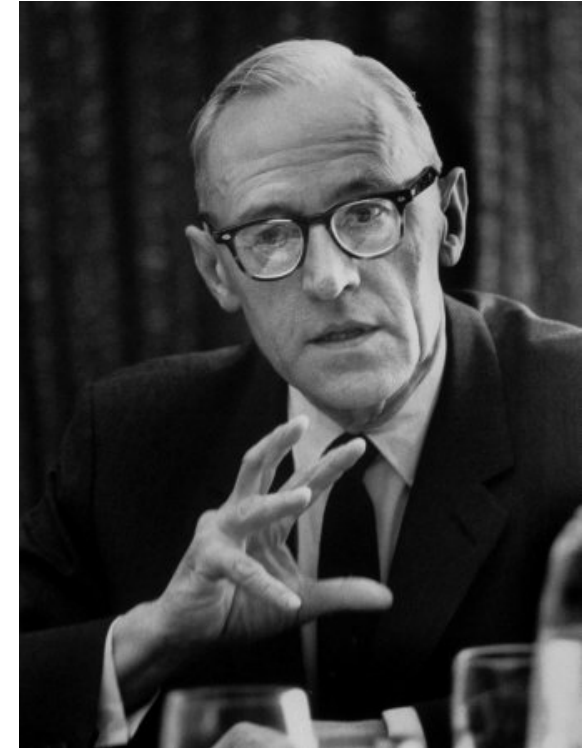
Gerard Debreu (1921–2004)
Nobel per l’economia nel 1983

Ma lo stesso Debreu durante la “Nobel lecture” dice: *“La seduzione della forma matematica può diventare quasi irresistibile. Nel perseguimento di tale forma, può darsi che il ricercatore sia tentato di dimenticare il contenuto economico e di evitare quei problemi economici che non siano matematizzabili”*

Interazione strategica



John (János) von Neumann
Budapest (Ungheria) 1903
Washington (USA) 1957

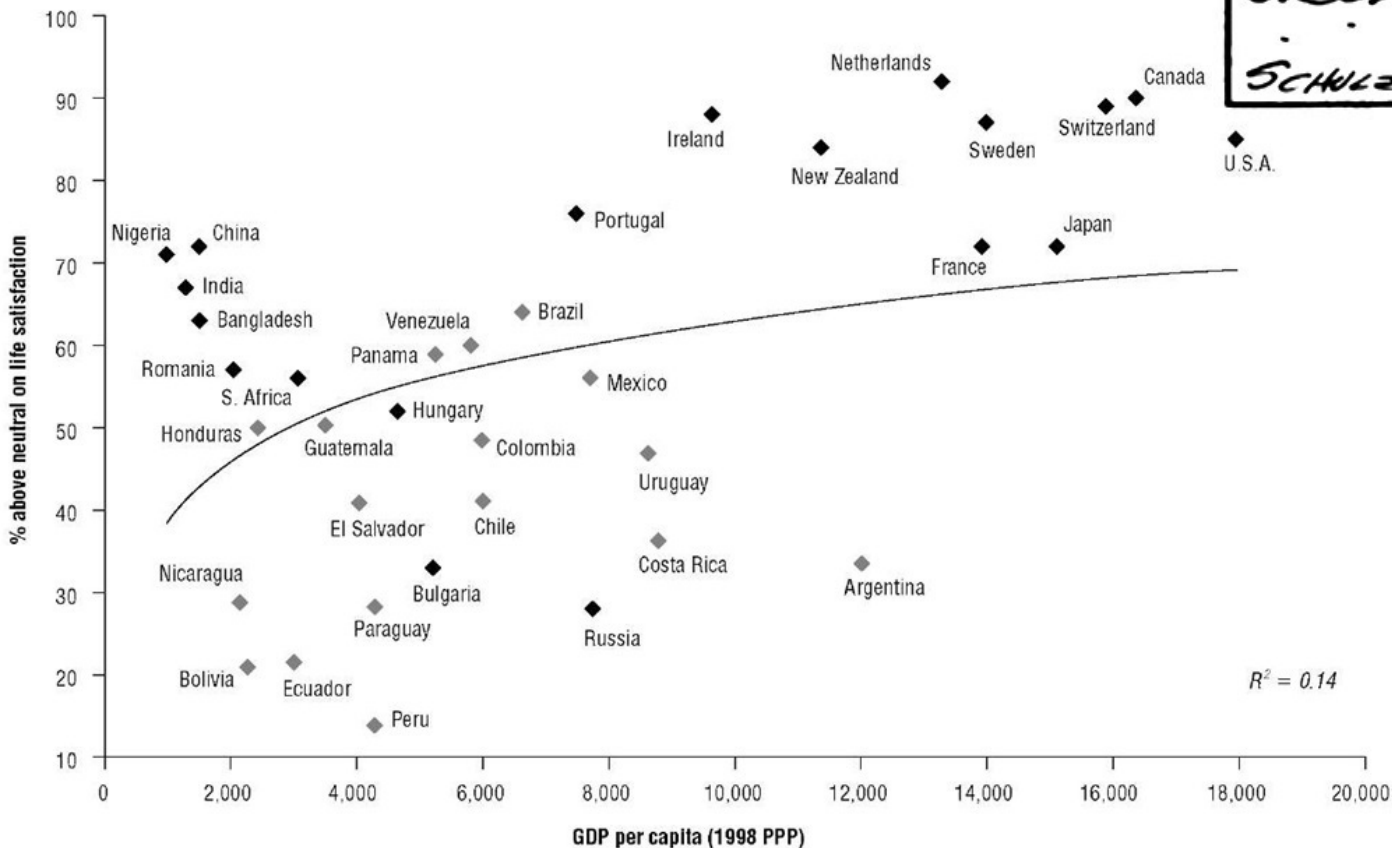


Oskar Morgenstern
Görlitz (Germania) 1902
Princeton (USA) 1977

Princeton, 1947

Una difficoltà. Come misurare il ben-essere ?

Il paradosso della felicità di Easterlin:
la ricchezza come proxy della felicità?



Misurare sentimenti morali e attitudini psicologiche:

- Prudenza, propensione al rischio
- Psicologia delle perdite e dei guadagni
- Amicizia, simpatia, empatia, affetti, altruismo, equità, gratitudine
- Motivazioni, carisma, imitazione, snobismo
- Senso di colpa, di vergogna, di invidia, di ingiustizia
- Distorsioni sistematiche nelle valutazioni

Concetti estranei all'attuale figura dell'Homo Oeconomicus

Altra difficoltà. Il determinismo

Variabili di stato $x_1(t)$ $x_2(t)$... $x_n(t)$

Dato lo stato del sistema in un dato istante, t_0 , quale sarà il suo stato futuro e da quali stati precedenti proviene?

Leggi locali di evoluzione

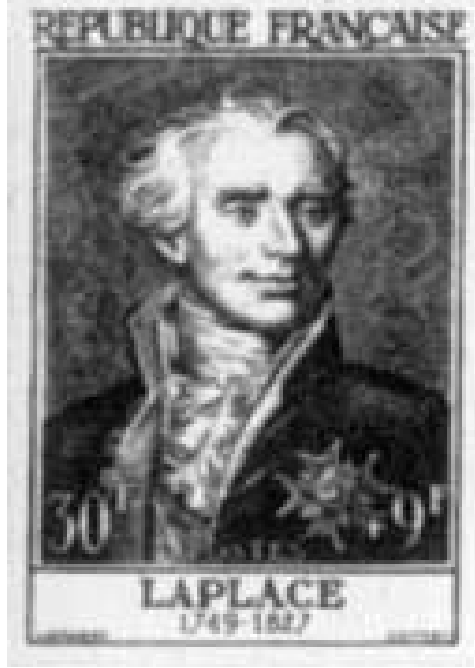
Tempo continuo $t \in \mathbb{R}$: equazioni differenziali

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Spesso in economia il tempo è scandito da decisioni che non possono essere continuamente rivedute: *decision driven time*

Tempo discreto $t \in \mathbb{N}$: equazioni alle differenze (mappe iterate, induttive)

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$



Pierre-Simon Laplace
1749-1827

Laplace (1776)

«Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro».

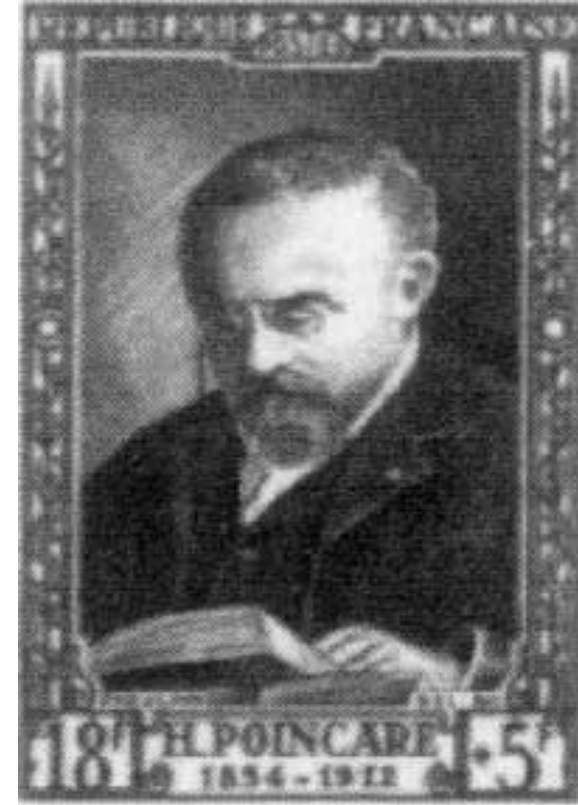
Henry Poincaré (1903)

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo.

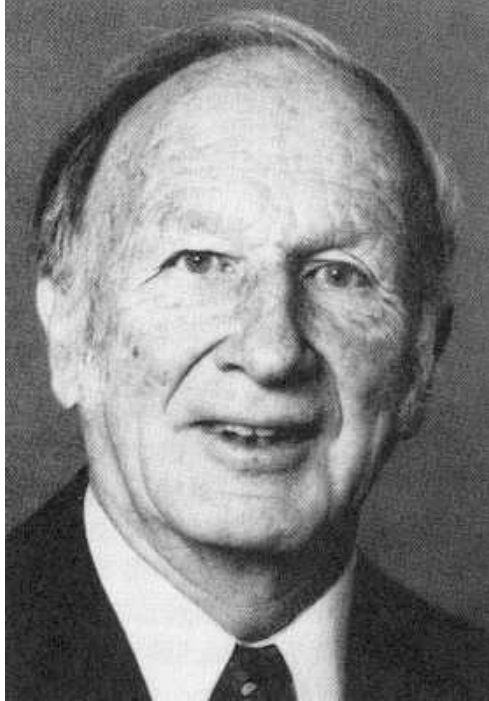
Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.

Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.

Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali..



Henry Poincaré, 1854-1912



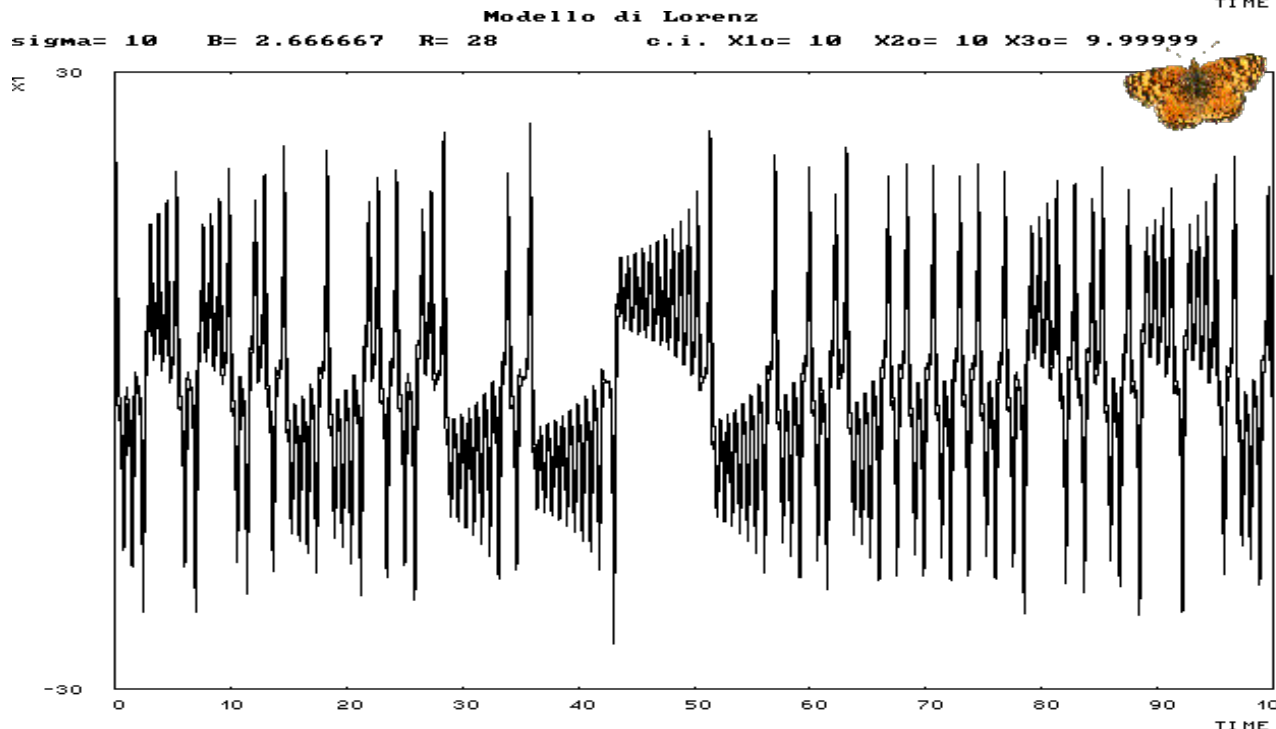
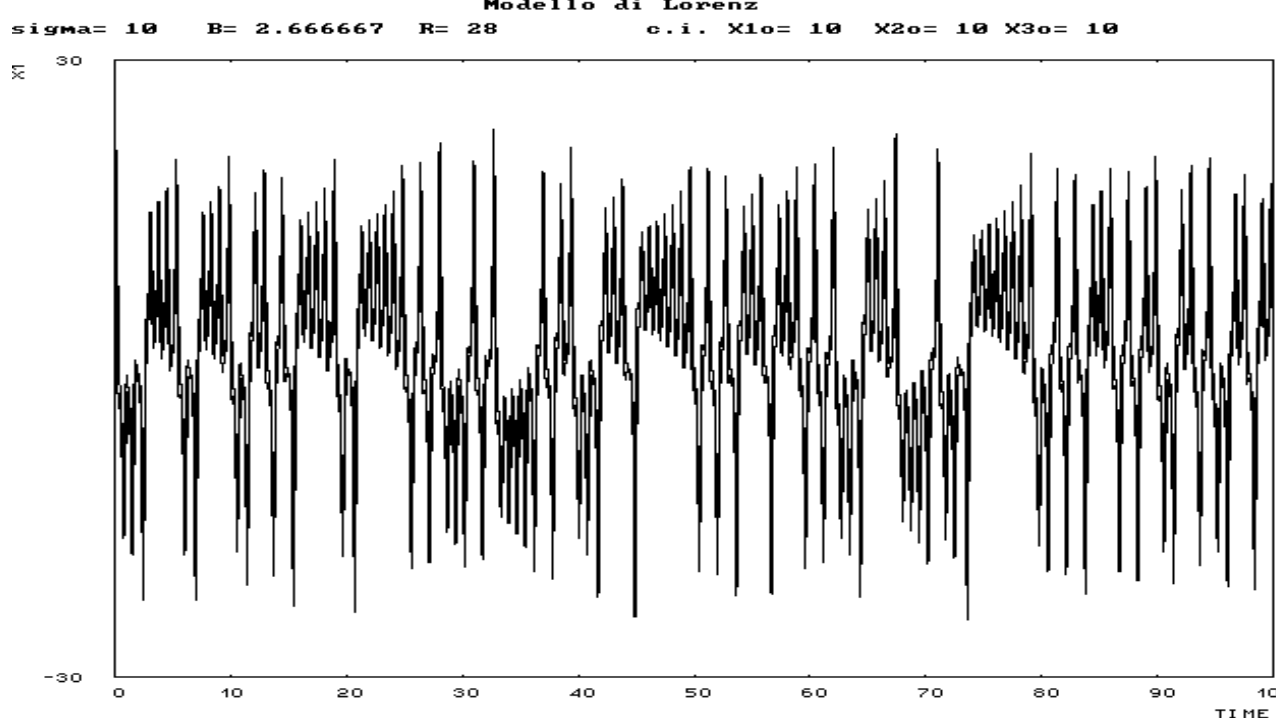
Edward Lorenz

(May 23, 1917–April 16, 2008)

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$



Modelli con aspettative

In economia e nelle scienze sociali lo stato attuale consegue sì da quelli del passato, ma dipende anche dalle *decisioni degli individui che lo compongono, decisioni che sono influenzate dalle aspettative che essi hanno sul futuro.*

$$x_{t+1} = f (x_{t+1}^{(e)})$$

Le aspettative degli agenti sul futuro influiscono sul modo in cui i sistemi evolvono: mappings from beliefs to realizations.

Gli agenti economici devono quindi fare congetture sugli stati futuri dell'Economia.

Ipotesi delle aspettative razionali (Muth, 1961, Lucas, 1972):

Gli agenti economici sono in grado di prevedere correttamente il futuro così come un fisico conosce le leggi della natura.

$$x_{t+1}^{(e)} = x_{t+1}$$

Così nasce l'agente economico razionale rappresentativo, in grado di effettuare sempre scelte ottimali.

Questo, associato all'ipotesi dei mercati efficienti è diventato il modello teorico dominante (neoclassico) che porta all'elegante teoria matematica dell'*equilibrio generale*.

Un atto di fede dell'economia neoclassica, con la convinzione che i mercati sono in grado di auto-correggersi e che il ruolo dei governi è tutt'al più quello di “*regolatori dalla mano leggera*”.

Aspettative razionali e caos deterministico. Una evidente antinomia

Se si parte da un modello con aspettative razionali e si scopre che esso genera caos deterministico, allora le previsioni non possono essere razionali per definizione di dinamiche caotiche.

Un corollario che contraddice un'ipotesi del teorema!

Benhabib, Day (1982) “A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 37-55.

Boldrin, Montrucchio. (1986) “On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths.” *Journal of Economic Theory* 40: 26—39.

Grandmont, J.M. (1985) “Endogenous Competitive Business Cycles” *Econometrica* 53: 995—1045.

Modelli con razionalità limitata

“Nei modelli occorre prevedere che gli agenti siano incerti sul futuro e occorre includere i costi per reperire informazioni.



Herbert Simon (1916–2001)
Nobel per l'Economia 1978

They possess only “bounded rationality”.
Rules of thumb, trial & errors in making decisions

Schemi adattivi, evolutivi, step by step

Agenti economici limitatamente razionali, adattivi

Esempi di aspettative limitatamente razionali

Naive $x_{t+1}^e = x_t$

Adattive $x_{t+1}^e = x_t^e + \alpha(x_t - x_t^e) = (1 - \alpha)x_t^e + \alpha x_t \quad 0 \leq \alpha \leq 1$

Fondamentalisti $x_{t+1}^e = x_t + \alpha(x^* - x_t) \quad , \quad \alpha > 0$

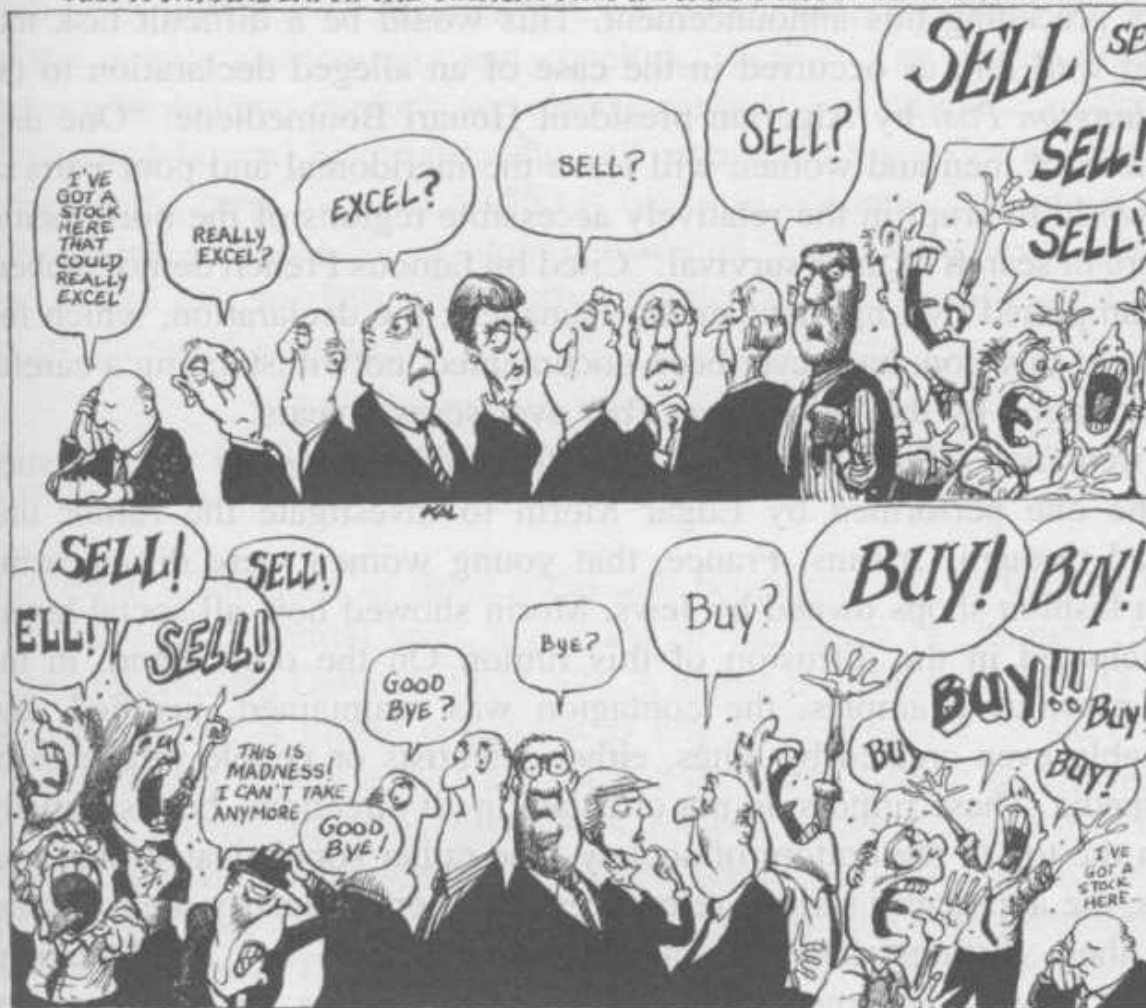
Chartisti (trend followers) $x_{t+1}^e = x_t + \beta(x_t - x_{t-1}) \quad , \quad \beta > 0$

Schemi imitativi (replicator dynamics, imitate the better)

KAL

KAL
BALTIMORE SUN
Baltimore
USA

JUST A NORMAL DAY AT THE NATION'S MOST IMPORTANT FINANCIAL INSTITUTION...



CARTOONISTS & WRITERS SYNDICATE <http://CartoonWeb.com>

FIG. 4.3. Cartoon of the impact of rumors in stock market behavior taken from the front page of *The Economist*, November 1–7, 1997, commenting on the turmoil following the 7% loss of October 27, 1997 on the DJIA. Creation of KAL.

Carl Chiarella “What’s beyond?” in *Lettera Matematica Pristem* (2010).



Carl Chiarella (1944-2016)

Ogni cambio di paradigma economico porta anche un cambio nel tipo di modellistica.

Negli anni 30 le idee keynesiane soppiantano il punto di vista classico perché indicato come responsabile della grande crisi del '29

Il paradigma neoclassico (ipotesi di agente economico razionale e mercati efficienti) sostituisce il punto di vista keynesiano accusato di essere inefficace nell'affrontare la stagnazione economica degli anni 70.

È ancora troppo presto per dire se l'attuale crisi economica avrà lo stesso profondo impatto sulle ipotesi dei modelli economici.

Chiarella conclude con la frase: *viviamo tempi interessanti*

危机

Ideogramma cinese per la parola *crisi*

Composta dai due ideogrammi

wei (pericolo) e *ji* (opportunità)

Economia comportamentale (Behavioural Economics): (The road not taken)

- Forte legame della modellistica con economia sperimentale e psicologia
- Individui limitatamente razionali, adattivi, decisioni attraverso approcci intuitivi ed euristici
- Presenza (prevedibile) di distorsioni di natura psicologica, regolarità nelle deviazioni dalla razionalità che permettono ancora una modellistica
- Politiche del paternalismo libertario, nudging
- Approccio fortemente interdisciplinare: economia, psicologia, complessità, evoluzione

Nobel dell'Economia comportamentale



Daniel Kahneman, psicologo di Tel Aviv
all'Università di Princeton
Nobel nel 2002 insieme a Vernon Smith



Robert Shiller, economista all'Università di Yale,
Nobel nel 2013 insieme a Eugene Fama e Lars Peter
Hansen



Richard Thaler Università di Chicago
Nobel nel 2017